جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

بنام خدا

ماخ

دفترچه سؤالات و پاسخ تشریحی
مرحله اول
شانزدهمین دوره‌ی المپیاد کامپیوتر سال ۱۳۸۴

تعداد سوالات		مدت آزمون (دقیقه)
سوالات چند گزینه‌ای	مساله‌های تشریحی	
۴۰	-	۲۴۰

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

تذکرات آزمون:

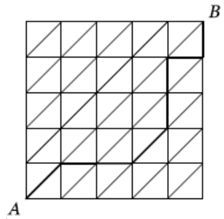
ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل **۴۰ سؤال چند گزینه‌ای** و وقت آن **۲۴۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

۱- در دبیرستان «هجرت نو» یک آزمون هماهنگ بین تمامی دانش‌آموزان برگزار شده است. این آزمون شامل دو درس فیزیک و ریاضی است و رتبه‌ی کل هر داوطلب، با توجّه به حاصل جمع نمره‌ی ریاضی و نمره‌ی فیزیک وی نسبت به سایر دانش‌آموزان محاسبه می‌شود. اگر امین در درس ریاضی رتبه‌ی هفتم و در درس فیزیک رتبه‌ی یازدهم را کسب کند، بدترین رتبه‌ی کلّی که می‌تواند داشته باشد کدام است؟ (توجّه: در هیچ درسی دو نفر نمره‌ی مساوی نگرفته‌اند.)

الف) نوزدهم ب) یازدهم ج) هجدهم د) شانزدهم ه) هفدهم

۲- در شکل مقابل اگر از هر نقطه بتوان به نقطه‌ی بالایی، راستی و بالاراستی رفت، چند مسیر به طول ۸ واحد از A به B وجود دارد؟ یکی از این مسیرها در شکل نشان داده شده است.



الف) ۲۰۰ ب) ۲۱۰ ج) ۲۳۰ د) ۵۶۰ ه) ۳۱۵۰

۳- یک جدول ۵ × ۵ را «منظّم» می‌گوییم اگر و فقط اگر در هر خانه‌اش یک عدد نوشته شده باشد و در ۲۵ خانه‌اش همه‌ی اعداد ۱ تا ۲۵ آمده باشند. یک جدول ۵ × ۵ را «خوش‌سطر» می‌گوییم اگر و فقط اگر حاصل‌ضرب ۵ عدد واقع در هر سطرش نه بر ۳۴ بخش‌پذیر باشد و نه بر ۳۸. به همین صورت یک جدول ۵ × ۵ را «خوش‌ستون» می‌گوییم اگر و فقط اگر حاصل‌ضرب ۵ عدد واقع در هر ستونش نه بر ۳۴ بخش‌پذیر باشد و نه بر ۳۸. چند جدول مختلف ۵ × ۵ منظّم داریم که هم خوش سطر باشد و هم خوش ستون؟

الف) !۱۱×!۱۲×۲۰۰ ب) !۲۵ ج) ۱۰ د) !۵ ه) !۱۳×!۱۰× ۱۲

۴- عدد $x = x_0 + 2\times x_1 + 2\times x_2 + 4\times x_3 + 8\times x_4 + 16\times x_5$ را در نظر بگیرید که در آن رقم‌های $x_0,\dots,x_5$ صفر یا یک هستند. معیّن کنید که برای چند مقدار مختلف x، بیش از یک ۶-تایی $(x_0, x_1,\dots, x_5)$ وجود دارد به طوری که در معادله‌ی فوق صدق کند.

الف) ۱۶ ب) ۲۴ ج) ۳۰ د) ۳۲ ه) ۳۴

۵- محمّدحسین می‌خواهد یک نمایشگاه وسایل خانگی را برق‌کشی کند. متاسفانه در کلّ این نمایشگاه تن‌ها یک پریز برق وجود دارد. البتّه محمّدحسین فکر این‌جا را کرده و با خود تعداد زیادی n راهی آورده است. به یک n– راهی ($n \geq 1$) می‌توان n تا دوشاخه‌ی برق وصل کرد و یک دوشاخه دارد که باید به طریقی (مستقیم به پریز یا توسّط n– راهی‌های دیگر) به برق وصل شود تا دوشاخه‌هایی که بدان وصلند را برق‌دار کند. اگر محمّدحسین ده تا ۱۰ راهی، هفت تا ۷ راهی، پنج تا ۴ راهی و چهار تا ۲ راهی و صد تا ۱ راهی داشته باشد، حداّکثر چند وسیله‌ی خانگی را می‌تواند به برق متّصل کند؟

الف) ۱۵۰ ب) ۱۵۲ ج) ۱۲۶ د) ۱۲۷ ه) هیچ‌کدام

۶- جدول ۳ × ۳ روبه‌رو داده شده است. در هر حرکت می‌توانیم جای دو سطر یا جای دو ستون از این جدول را با هم عوض کنیم. با این حرکات به چند جدول مختلف می‌توان رسید؟

۰	۱	۱
۱	۱	۰
۱	۰	۱

الف) ۱۲ ب) ۴۲ ج) ۸۴ د) ۶ ه) ۳۶

۷- بازی سه نفره‌ی «عددسازی» به این صورت انجام می‌شود: ۳ نفر دور یک میز گرد می‌نشینند و به هر یک از آن‌ها یک کارت داده می‌شود که روی آن ۰۱ و یا ۱۰ نوشته شده است. در ابتدا بازی کنی که از دیگران بزرگ‌تر است یک رقم دل‌خواهِ ۰ یا ۱ روی میز می‌نویسد و سپس به ترتیب ساعت گرد نوبت عوض می‌شود. هر کس در نوبت خود آخرین رقمی که روی میز نوشته شده را بررسی می‌کند. اگر ۰ بود رقم سمت راست کارتش و اگر ۱ بود رقم سمت چپ کارتش را در سمت راست عدد روی میز می‌نویسد. بازی آن‌قدر ادامه پیدا می‌کند تا کوچک‌ترین بازی‌کن خسته شود. تعیین کنید در بازی عددسازی چند تا از اعداد زیر ممکن است تولید شوند؟

۰۱۱۰۱۱۰۱۱۰۱۱۰ ۰۰۱۱۰۰۱۱۰۰ ۰۰۱۱۱۰۰۱۱۱۰۰ ۰۱۱۱۰۰۰۱۱۱۰ ۰۰۰۰۱۱۱۱۰۰۰۰

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) ۵

۸- فرض کنید $x_0 + 4x_1 + 16x_2 + 64x_3 = 100$ باشد. اگر هر یک از x_0 تا x_3 از مجموعه‌ی {۲، ۱، ۰، ۱-، ۲-} انتخاب شده باشد، کمینه‌ی مقدار کدام است؟

الف) ۲ ب) ۱- ج) ۵ د) ۰ ه) ۱

۹- بهروز، سیامک و علی هر یک مالک یک دستگاه خودرو هستند. مدل این خودروها پراید، پژو و دوو می‌باشد. رنگ یکی از این ماشین‌ها سیاه، دیگری سفید و سوّمی طوسی است. می‌دانیم که ماشین علی جلوی پراید و ماشین سفید پشت پراید پارک است، دوو طوسی رنگ است و نیز ماشین سیامک سیاه نیست. نوع و رنگ ماشین متعلّق به هر یک از افراد کدام است؟

الف) (بهروز، پراید سفید)، (علی، پژو سیاه) و (سیامک، دوو طوسی)

ب) (بهروز، پژو سفید)، (علی، پراید سیاه) و (سیامک، دوو طوسی)

ج) (بهروز، پژو سیاه)، (علی، دوو طوسی) و (سیامک، پراید سفید)

د) (بهروز، پراید سیاه)، (علی، دوو طوسی) و (سیامک، پژو سفید)

ه) (بهروز، پراید سیاه)، (علی، پژو طوسی) و (سیامک، دوو سفید)

۱۰- یک جدول ۸ × ۸ داریم که ۳۲ خانه‌ی ۴ ستون اوّلش سیاه و ۳۲ خانه‌ی دیگرش سفید هستند. در هر حرکت می‌توانیم رنگ دو خانه‌ی مجاور را با هم عوض می‌کنیم (در صورتی که هم‌رنگ باشند تغییری در رنگشان رخ نمی‌دهد.) دو خانه مجاورند اگر و فقط اگر ضلع مشترک داشته باشند. کم‌ترین تعداد حرکت لازم برای شطرنجی کردن جدول چند است؟ جدولی شطرنجی است که رنگ هیچ دو خانه‌ی مجاوری در آن یکی نباشد.

الف) ۱۰۰ ب) ۴۸ ج) ۳۲ د) ۱۲۸ ه) ۶۴

۱۱- شایان دوستانش را برای جشن تولّدش به پارک دعوت کرده است. او قصد دارد تعدادی پیتزا برای آن‌ها بخرد. بعضی از دوستان او عادت به خوردن یک پیتزای کامل ندارند به همین دلیل او از قبل از دوستانش پرسیده که هر کدام چه اندازه‌ای از یک پیتزا را می‌خورد. ۱۱ نفر از آن‌ها گفته‌اند که هر کدام یک پیتزای کامل می‌خورند، ۹ نفر هر کدام $\frac{3}{4}$ پیتزا می‌خورند، ۱۳ نفر هر کدام $\frac{1}{2}$ پیتزا و ۵ نفر هر کدام $\frac{1}{4}$ پیتزا می‌خورند. در ضمن هر یک از دوستانش علاقه دارد پیتزای خواسته شده‌اش، در یک قطعه‌ی به هم چسبیده به او داده شود. شایان می‌خواهد حدّاقل تعداد پیتزا را از پیتزا فروشی بخرد. به نظر شما شایان چند تا پیتزای کامل باید بخرد تا بتواند به هر نفر مطابق میلش غذا بدهد؟

الف) ۲۵ ب) ۲۸ ج) ۲۷ د) ۲۶ ه) ۳۰

۱۲- ۱۰ نفر دور یک میز دایره‌ای نشسته‌اند. هر نفر یا دروغ‌گوست یا راست‌گو؛ دروغ‌گو همیشه دروغ می‌گوید و راست‌گو همیشه راست. هر نفر گفته است که شخص سمت راستش دروغ‌گوست یا راست‌گو. ما می‌خواهیم به این ۱۰ نفر صفت راست‌گویی و دروغ‌گویی نسبت دهیم به‌طوری‌که با گفته‌هایشان مطابقت داشته باشد. حدّاکثر چند طریق برای صفت نسبت دادن به این ۱۰ نفر وجود دارد؟

الف) ۱ ب) 2^{10} ج) 2^5 د) ۲ ه) ۴

۱۳- عدد $\overline{a_1a_2a_3...a_n}$ $(a_1 \neq ۰)$ را عدد «خالی‌بند» می‌گوییم اگر به‌ازای هر $۱ \leq i \leq n$ عدد $\overline{a_1a_2...a_i}$ بر عدد i بخش‌پذیر باشد. مثلا ۱۲۹ خالی‌بند است. به‌ازای چند تا از مقادیر ۵، ۷، ۸ و ۹ برای n عدد خالی‌بند n رقمی وجود دارد؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴

۱۴- رشته‌ای از حروف الفبای انگلیسی داده شده است. در هر مرحله، می‌توان یکی از دو عملِ زیر را انجام داد:
جای دو حرف را در رشته به‌دل‌خواه تغییر داد؛
دو حرف الفبا را (مانند c_1 و c_2) انتخاب کرده، و سپس تمام حروف c_1 در رشته‌ی مورد نظر را به c_2 تغییر داده و بالعکس.
دو نمونه در این‌جا ذکر می‌کنیم: با انجام عمل اوّل می‌توان از SALAM به رشته‌ی SALMA رسید. با انجام عمل دوّم می‌توان از SALAM به ASLSM و BALAM رسید. در کدام‌یک از گزینه‌های زیر می‌توان با انجام تعدادی از حرکات فوق‌الذّکر، از رشته‌ی اوّل به رشته‌ی دوّم رسیـد؟

الف) SALAM $\leftarrow$ MASWQ
ب) ABCDDDEFF $\leftarrow$ ZYXXWWQQP
ج) HHIJJIJJKHOL $\leftarrow$ UDHQOYQOYOOY
د) IDKLMLJMJM $\leftarrow$ UOOQWERPPP
ه) IDJKER $\leftarrow$ QWKIOPX

۱۵- اعداد ۱ تا n را به‌ترتیب لغت‌نامه‌ای مرتّب کرده‌ایم. جای‌گاه عدد k $(۱ \leq k \leq n)$ را با $Q_{n,k}$ نمایش می‌دهیم. به‌عنوان نمونه n را برابر ۱۳ قرار می‌دهیم و اعداد به‌صورت زیر مرتّب می‌شوند (از چپ به راست):

۱،۱۰،۱۱،۱۲،۱۳،۲،۳،۴،۵،۶،۷،۸،۹

لذا $Q_{۱۳,۱۰} = ۲$ و $Q_{۱۳,۲} = ۶$ می‌باشد. کوچک‌ترین n را بیابید که $Q_{n,۱۲۳} = ۲۰۰$ شود.

الف) ۱۱۶۹ ب) ۱۱۷۱ ج) ۱۱۷۳ د) ۱۱۷۵ ه) امکان‌پذیر نیست

۱۶- نظام عددی مبنای ۱۰-، مفروض است. وزن هر رقم در این‌جا نیز هم‌چون نظام دهدهی، بسته‌به جای‌گاهش توانی از ۱۰ می‌باشد؛ با این تفـاوت کـه وزن ارقـامـی کـه تـوان فـردی از ۱۰ اسـت، منـفـی مـی‌بـاشـد. مثـلا ارزش عـدد سـه رقمـی ۱۲۳ در ایـن نظـام بـرابـر $۱\times۱۰^۲ - ۲\times۱۰^۱ + ۳ = ۸۳$ است. عدد ده رقمی x = ۱۹۹۹۹۹۹۹۹۹ در این نظام مفروض است. مطلوب است مجموع ارقام عدد y در این نظام، به‌طوری‌که y = -x .

الف) ۱ ب) ۳ ج) ۱۷ د) ۴۵ ه) ۸۲

۱۷- روی تخته تعدادی عدد طبیعی نوشته شده است. در هر مرحله یک عدد روی تخته مانند a $(a > ۱)$ را پاک می‌کنیم و به‌جای آن $\lceil a/۲ \rceil$ و $\lfloor a/۲ \rfloor$ را می‌نویسیم. این کار را آن‌قدر ادامه می‌دهیم تا همـه‌ی اعـداد روی تخته برابر با ۱ شونـد. حال فرض کنیـد در ابتدا فقط عدد n روی تخته نوشتـه شده باشـد. تعداد اعداد متفـاوتـی که در طـول عملیـات فوق روی تختـه نوشتـه می‌شـود را $f(n)$ بنامید. مثلا $f(۷) = ۵$ ، زیرا ابتدا به جای ۷، دو عدد ۳ و ۴ را می‌نویسیم. سپس به‌جای ۴، ۲ تا ۲ و به جای ۳، ۱ و ۲ را می‌نویسیم. در پایان نیز به جای هر ۲، دو تا ۱ می‌نویسیم. بنابراین ۵ عدد مختلفِ ۱، ۲، ۳، ۴ و ۷ در طول این عملیات روی تخته نوشته می‌شوند. بزرگ‌ترین مقدار $f(n)$ به ازای $۱ \leq n \leq ۴۰۰۰$ چند است؟

الف) ۲۳ ب) ۳۱ ج) ۲۱ د) ۱۹ ه) ۲۰۰۰

۱۸- ۳ عدد a، b و c روی تخته نوشته شده‌اند. آرش و ایمان به این ترتیب با این سه عدد بازی می‌کنند که هر کس در نوبت خود دو عدد دل‌خواه از این سه عدد، مثلا a و b را از روی تخته پاک می‌کند و دو عدد $a + b$ و $a - b$ را به‌جای آن‌ها می‌نویسد. آرش بازی را شروع می‌کند. آرش و ایمان به‌طور یک در میان بازی می‌کنند. آرش می‌خواهد کار را به جایی برساند که هر سه عددِ نوشته شده روی تخته بر ۳ بخش‌پذیر باشند و ایمان می‌خواهد جلوی این کار را بگیرد. به ازای چند تا از سه‌تایی‌های زیر به عنوان مقادیر اوّلیّه‌ی (a,b,c)، آرش می‌تواند به هدف خودش برسد.

(۱،۲،۱۰)،(۲،۳،۶)،(۳،۱،۴)،(۵،۶،۷)،(۱۰۰،۱۰۰۰،۱۰۰۰۰)

الف) ۱ ب) ۴ ج) ۲ د) ۰ ه) ۵

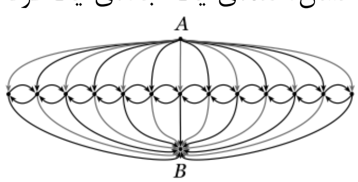
۱۹- عدد r رقمی $\overline{a_r a_{r-1} \dots a_2 a_1}$ مفروض است (a₁ کم‌ارزش‌ترین رقم است). اگر $\overline{a_1 a_r a_{r-1} \dots a_2} = 4 \times \overline{a_r a_{r-1} \dots a_2 a_1}$ و $a_1 = 8$ باشد، مقدار a_{r-1} چیست؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۹ د) ۷ ه) ۴

۲۰- آیدین و محمّد روی یک جدول $k \times k$ $(k \geq 5)$ بازی «بایوب» را انجام می‌دهند. بازی به این صورت است که هر کس در نوبت خودش یک عدد گویا در یکی از خانه‌های خالی جدول قرار می‌دهد تا تمام خانه‌های جدول پر شود. اگر پس از پر شدن جدول، حاصل‌جمع خانه‌های یک سطر با حاصل‌جمع خانه‌های یک ستون برابر شود، محمّد، و در غیر این‌صورت، آیدین برنده است. اگر در دور اوّل، آیدین شروع‌کننده‌ی بازی باشد و در دور دوّم، محمّد بازی را آغاز کند و نیز هر بازی‌کن در هر حرکت به‌ترین بازی‌اش را ارائه دهد، تعیین کنید به‌ترتیب چه کسی برنده‌ی دور اوّل و دور دوّم خواهد شد؟

الف) محمّد، آیدین ب) محمّد، محمّد ج) آیدین، آیدین د) آیدین، محمّد ه) به مقدار k بستگی دارد

۲۱- در شکل مقابل، هر کدام از ۱۵ نقطه نشان‌دهنده‌ی یک شهر و هر کدام از ۵۰ پاره‌خط فلش‌دار، نشان‌دهنده‌ی یک جادّه‌ی یک‌طرفه می‌باشد. یک مسیر، دنباله‌ای از جادّه‌های متوالی‌ست که از شهر A شروع شده و به شهر B برسد و هر شهر، حداّکثر یک‌بار در آن ظاهر شود. طول یک مسیر برابر تعداد جادّه‌هایی است که در آن مسیر قرار دارند. تعداد مسیرهای به‌طول فرد منهای تعداد مسیرهای به طول زوج برابر است با:



الف) ۱۳- ب) ۱۳ ج) ۱
د) ۰ ه) ۱-

۲۲- ماشین «قارقوری» که برای نمایش اعداد طبیعی به‌کار می‌رود، از ۹ کلید و ۹ کارت‌خوان تشکیل شده است. برای کار با «قارقوری»، ابتدا باید ۹ عدد صحیح مثبت روی ۹ کارت تمیز نوشته و در کارت‌خوان‌های ماشین ماشین قرار دهیم، سپس با روشن و خاموش کردن کلیدهای آن، به عدد مورد نظر برسیم. می‌دانیم عددی که «قارقوری» به‌عنوان خروجی نمایش می‌دهد برابر است با: $n = s_1 \times v_1 + s_2 \times v_2 + \dots + s_9 \times v_9$ که v_i عدد نوشته‌شده روی کارت i ام بوده و مقدار s_i در صورتی که کلید i اُم روشن باشد برابر یک و در صورتی که خاموش باشد، برابر منفی یک است.

وهاب قصد دارد از این ماشین برای نمایش اعداد طبیعی مختلف استفاده کند. می‌دانیم وهاب، مقادیر اوّلیّه‌ی کارت‌ها را تن‌ها یک‌بار و آن‌هم در آغاز کار با دستگاه می‌تواند تعیین کند و از آن به بعد صرفا با تغییر وضعیّت کلیدها قادر به تغییر مقدار خروجی خواهد بود. حداّکثر مقدار k را بیابید که وهاب بتواند طوری مقادیر کارت‌ها را در ابتدا تعیین کند که تن‌ها با تغییر دادن حالت کلیدها قادر به نمایش تمام اعداد ۱ تا k باشد.

الف) ۹ ب) ۸۱ ج) ۵۱۱ د) ۱۹۶۸۲ ه) هیچ‌کدام

۲۳- آقای «ب» به‌تازگی یک کیف سامسونت خریده است که رمز آن از سه گردونه‌ی ارقام تشکیل شده است که اعداد ۰ تا ۹ به‌ترتیب روی هر کدام از آن‌ها نوشته شده‌اند. آقای «ب» در هر حرکت می‌تواند یک، دو یا سه گردونه را هم‌زمان یک واحد به‌جلو یا عقب بچرخاند؛ در این صورت اعداد روی گردونه‌های چرخانده شده به ترتیب یک واحد زیاد یا یک واحد کم می‌شوند. دقّت کنید که اگر گردونه‌ای مقدار ۹ را داشته باشد و یک واحد به جلو چرخانده شود، مقدار آن صفر شده و نیز اگر گردونه‌ای مقدار صفر را داشته باشد و یک واحد به عقب چرخانده شود، مقدار آن ۹ می‌شود. برای مثال، آقای «ب» می‌تواند مطابق شکل زیر، رمز کیفش را در ۴ حرکت از ۳۲۴ به صفر تبدیل کند:

$$324 \xrightarrow{\text{چرخاندن هر سه گردونه به عقب}} 213 \xrightarrow{\text{چرخاندن هر سه گردونه به عقب}} 102 \xrightarrow{\text{چرخاندن دو گردونه‌ی چپ و راست به عقب}} 001 \xrightarrow{\text{چرخاندن گردونه‌ی سمت راست به عقب}} 000$$

اگر حدّاقل تعداد حرکات لازم برای تبدیل عدد سه‌رقمی x به سه رقم صفر را $f(x)$ بنامیم، حدّاکثر مقدار $f(x)$ برای تمام مقادیر $۱۰۰ \le x \le ۹۹۹$، برابر است با:

الف) ۶ ب) ۷ ج) ۸ د) ۹ ه) ۱۵

۲۴- اعداد ۰ تا ۶۴ به‌جز عدد ۳۲ در خانه‌های یک جدول که دارای ۲ سطر و ۳۲ ستون است به‌نحوی نوشته شده‌اند که اعداد ۹ تا ۳۱ در سطر پایین قرار دارد و مجموع دو عدد هر ستون نیز برابر ۶۴ است. در هر مرحله می‌توانیم یک ستون را انتخاب کرده و از عدد خانه‌ی بالایی آن ستون، عدد ۲^k $(k \ge ۰)$ را کم کرده و به عدد پایینی همان ستون اضافه کنیم. هدف این‌است که پس از تعدادی مرحله به جدولی برسیم که جای اعداد هر ستون آن نسبت به جدول اوّلیّه تعویض شده باشد. برای مثال، در ستونی که اعداد ۴۷ و ۱۷ روبه‌روی هم نوشته شده‌اند، می‌توان پس از ۴ حرکت مطابق شکل زیر جای دو عدد را عوض کرد:

$$\begin{array}{|c|}\hline ۴۷\\ \hline ۱۷\\ \hline\end{array} \xrightarrow{۲^۱} \begin{array}{|c|}\hline ۴۵\\ \hline ۱۹\\ \hline\end{array} \xrightarrow{۲^۲} \begin{array}{|c|}\hline ۴۱\\ \hline ۲۳\\ \hline\end{array} \xrightarrow{۲^۳} \begin{array}{|c|}\hline ۳۳\\ \hline ۳۱\\ \hline\end{array} \xrightarrow{۲^۴} \begin{array}{|c|}\hline ۱۷\\ \hline ۴۷\\ \hline\end{array}$$

حدّاقل تعداد مراحل لازم برای تعویض دو عدد تمام ستون‌ها با هم‌دیگر و رسیدن به جدولی که نسبت به جدول ابتدایی قرینه شده باشد، برابر است با:

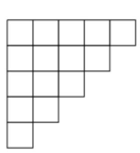
الف) ۳۳ ب) ۷۹ ج) ۸۰ د) ۸۱ ه) ۱۹۳

۲۵- همان مسئله‌ی قبل را در حالتی در نظر بگیرید که به‌جای ۳۲ ستون، ۳ ستون که به ترتیب در آن‌ها اعداد «۶۳ و ۱»، «۴۷ و ۱۷» و «۵۵ و ۹» نوشته شده است، داشته باشیم و بتوان از عدد پایینی هم عدد ۲^k $(k \ge ۰)$ را کم کرده و به عدد بالایی اضافه کرد. در این حالت حدّاقل تعداد مراحل برای تعویض دو عدد هر ۳ ستون، برابر است با:

الف) ۶ ب) ۷ ج) ۸ د) ۹ ه) ۱۲

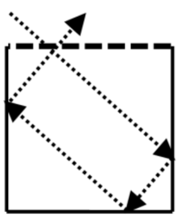
۲۶- با روی‌هم چیدن تعدادی مکعب واحد یک حجم سه‌بعدی را ایجاد کرده‌ایم. تن‌ها می‌دانیم که اگر از هر یک از شش جهت پایین، بالا، راست، چپ، جلو و عقب از این حجم عکس بگیریم، دوران‌ها و تقارن‌هایی از شکل روبرو ایجاد می‌شوند.

به‌نظر شما در ساخت این حجم حدّاکثر از چند مکعب استفاده شده است؟



الف) ۴۸ ب) ۳۲ ج) ۵۱ د) ۴۲ ه) ۳۵

۲۷- شکل روبه‌رو یک مستطیل آینه‌ای به ابعاد ۴ × ۴ آینه‌ای را نشان می‌دهد که روی سطح بالایی آن ۵ سوراخ (با احتساب گوشه‌ها) با فواصل مساوی از هم تعبیه شده‌اند. یک سوراخ طلایی می‌گوییم اگر پس از تاباندن یک پرتو نور از آن سوراخ با زاویه‌ی ۴۵ یا ۱۳۵ درجه نسبت به ضلع بالایی مستطیل آن پرتو بعد از دقیقا یک بار برخورد به ضلع پایینی مستطیل دقیقا از همان سوراخ ورودی، خارج شود. دقّت کنید که اگر یک پرتو به یکی از دو کنج پایینی برسد، چون بازتابش روی خودش می‌افتد، نابود می‌شود ولی اگر به یکی از دیواره‌ها یا کف برخورد کند، با ۹۰ درجه چرخش، بازتاب یافته و مسیرش را ادامه می‌دهد. مجموع تعداد سوراخ‌های طلایی در سه جدول «۱۳۸۴ × ۱۳۸۴»، «۱۳۸۴ × ۲۰۰۶» و «۱۳۸۴ × ۴۱۵۲» چند است؟ بدیهی است که یک جدول «$n \times m$»، $m + 1$ سوراخ (با احساب گوشه‌ها) دارد؟

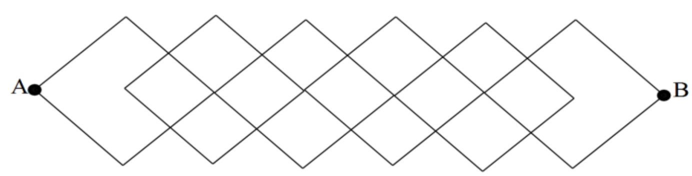


الف) صفر ب) ۱۳۸۳ ج) ۲۷۶۶ د) ۴۱۴۹ ه) هیچ‌کدام

۲۸- مهدی و مرتضی روی یک جدول ۵ × ۵ «فوزبازی» می‌کنند. این بازی به‌این صورت است که در ابتدا در خانه‌ی وسط جدول یک لوبیا قرار دارد و هر کس در نوبت خودش در یکی از خانه‌های خالی جدول یک لوبیا قرار می‌دهد. اوّین کسی که کاری کند که سه لوبیا در سه خانه‌ی متوالی روی یک سطر، ستون یا قطر قرار بگیرند، برنده‌ی بازی می‌شود. از آن‌جا که این بازی بسیار پرهیجان است، حسن برای این بازی ۱۰۰ تومان جایزه تعیین کرده است که در صورتی که در پایان بازی، k لوبیا در خانه‌های جدول قرار داشته باشد، k تومان به بازنده و $100 - k$ تومان به برنده می‌دهد! اگر مهدی اوّلین لوبیا را (بعد از لوبیای اوّلیّه‌ی خانه‌ی وسط) روی جدول قرار بدهد و هر دو بازی‌کن به‌ترین بازی‌شان را انجام بدهند، برنده و حدّاکثر جایزه‌ی وی کدام گزینه است؟

الف) مرتضی، ۸۹ ب) مهدی، ۹۲ ج) مهدی، ۹۴ د) مرتضی، ۹۳ ه) هیچ‌کدام

۲۹- در شکل مقابل، اگر بتوان از روی خطوط فقط در جهت چپ به راست حرکت کرد، تعداد مسیرهای مختلف بین A و B برابر است با:



الف) ۵۴ ب) ۸۱ ج) ۱۶۲ د) ۲۴۳ ه) ۴۸۶

۳۰- ۲۴ نفر با شماره‌های ۱ تا ۲۴ در یک ردیف کنار هم ایستاده‌اند (شماره‌ی فرد سمت چپ ۱ است). در دست هر کدام یک عدد کارت قرار دارد که روی آن یکی از دو شماره‌ی ۰ یا ۱ نوشته شده است. شماره‌ی روی کارت‌ها از چپ به راست به صورت زیر است:

$$\underbrace{00\ldots00}_{A}\ \underbrace{10101010}_{A}\ \underbrace{00\ldots00}_{A}$$

تعدادی سوت (با شماره‌های ۱، ۲، ...) زده می‌شود. به محض شنیدن سوت شماره‌ی s، نفر شماره‌ی i ($1 \le i \le 24$) دقیقا به صورت زیر عمل می‌کند:

اگر s فرد باشد: اگر i فرد است، او کارت خود را به نفر بعدی (شماره‌ی $i + 1$) و اگر i زوج است کارت خود را به نفر قبلی (شماره‌ی $i - 1$) نشان می‌دهد.

اگر s زوج باشد: اگر i زوج است، او کارت خود را به نفر بعدی در صورت وجود (شماره‌ی $i + 1$) و اگر i فرد است کارت خود را به نفر قبلی در صورت وجود (شماره‌ی $i - 1$) نشان می‌دهد.

دو نفر که کارت‌های خود را به هم نشان می‌دهند، اگر سمت راستی مقدار ۰ و سمت چپی مقدار ۱ داشته باشند، این دو نفر کارت‌های خود را با هم عوض می‌کنند.

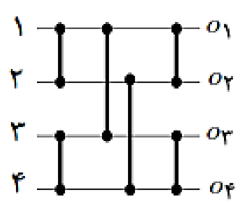
دقیقاً پس از چندمین سوت کارت‌ها به صورت مرتّب ۱۱ … ۱۱۰۰ … ۰۰ در می‌آید؟

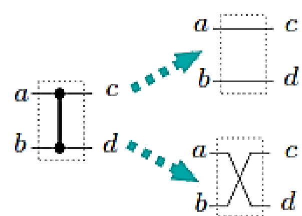
الف) ۱۶ ب) ۱۲ ج) ۸ د) ۷ ه) ۱۵

۳۱- تعداد زیرمجموعه $\{۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷\}$ که مجموع اعضای هر یک از آن‌ها بر ۳ بخش‌پذیر باشد چند تاست؟ (مجموع اعضای مجموعه‌ی تهی صفر است.)

الف) ۴۴ ب) ۳۹ ج) ۴۰ د) ۴۹ ه) ۳۶

۳۲- مدار زیر با چهار ورودی و ۶ «سویچ» را در نظر بگیرید. هر سویچ می‌تواند مستقل از بقیه‌ی سویچ‌ها در دو حالت «مستقیم» یا «ضربدری» قرار گیرد. چنان‌چه در شکل نشان داده شده است، اگر سویچ در حالت مستقیم باشد دو سر ورودی‌اش را مستقیماً به دو سر خروجی‌اش وصل می‌کند. در حالت ضربدری، سویچ این کار را به‌صورت ضربدری انجام می‌دهد.





اگر ورودی از بالا به پایین ۱، ۲، ۳ و ۴ باشد، با قرار دادن سویچ‌ها در حالات مختلف در نهایت خروجی از بالا یک جای‌گشت خاص از اعداد ۱ تا ۴ خواهد شد.

در مدار شکل بالا کدامیک از جای‌گشت‌های زیر (از بالا به پایین) قابل تولید نیست؟

الف) ۲، ۳، ۴، ۱
ب) ۳، ۱، ۴، ۲
ج) ۳، ۳، ۲، ۱
د) ۴، ۲، ۱، ۳
ه) هیچ‌کدام، همه‌ی این موارد را می‌توان تولید کرد

۳۳- یک جدول ۱ × ۷ خالی داریم که به خانه‌های آن از سمت چپ به راست، شماره‌های ۰ تا ۶ را نسبت داده‌ایم. می‌خواهیم عناصر a، b تا g را به آن اضافه کنیم و برای هر کدام، یک مکان اوّلیّه مطابق جدول روبه‌رو در نظر گرفته‌ایم.

عنصر	مکان اولیه
a	۳
b	۵
c	۳
d	۴
e	۵
f	۶
g	۳

عناصر مذکور به ترتیب دل‌خواه برای درج به جدول وارد می‌شوند. اگر مکان اوّلیّه‌ی عنصر x برابر k باشد (مثلا برای a این مقدار برابر ۳ است)، به ترتیب مکان‌های k، (k + ۱) mod ۷، (k + ۲) mod ۷، تا (k + ۶) mod ۷ را بررسی می‌کنیم و x را در اوّلین مکان خالی قرار می‌دهیم. می‌دانیم i mod j باقی‌مانده‌ی تقسیم صحیح عدد i بر عدد j است. به ازای ترتیب‌های مختلف اضافه کردن عناصر a,b,…,g به جدول، کدام‌یک از حالت‌های زیر نمی‌تواند حاصل شود؟

الف) . e | f | g | a | c | b | d
ب) c | e | b | g | f | d | a
ج) b | d | f | a | c | e | g
د) c | g | b | a | d | e | f
ه) هیچ‌کدام، تمام موارد می‌توانند باشند

۳۴- در جریان یک مذاکره دو گروه ۱۰ نفری در دو طرف یک میز نشسته‌اند. هر نفر از هر کدام از گروه‌ها دقیقا روبه‌روی یک نفر از گروه دیگر قرار دارد. در این مذاکره راس هر ساعت به افراد مذاکره کننده چای تعارف می‌شود. سر هر ساعت هر مذاکره کننده به افراد گروه دیگر به جز کسی که روبه‌روی او نشسته است (۹ نفر) نگاه می‌کند. اگر از این تعداد فردی از این افراد در ساعت قبل چای نوشیده بودند این فرد در این ساعت چای خواهد نوشید ولی اگر تعداد زوجی از آن‌ها در ساعت قبل چای نوشیده بودند وی چای نخواهد نوشید. می‌دانیم که راس ساعت اوّل، ۱۳ نفر از مجموع ۲۰ نفر چای خورده‌اند، چند نفر از این ۲۰ نفر در ساعتِ ۲۵۷۳ ام چای خواهند خورد؟

الف) ۱۳ ب) ۱۰ ج) ۲۰ د) ۶ ه) ۷

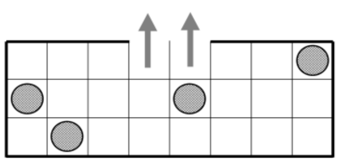
۳۵- ماشینی داریم که با فشار دادن دکمه‌ی «نمایش» آن، همه‌ی اعدادی که در خود دارد را یک‌به‌یک و بدون ترتیب خاصّی به ما نشان می‌دهد و این کار را اگر بخواهیم تکرار می‌کند، ولی ممکن است همان ترتیب قبلی نباشد. ما فقط یک ماشین حساب معمولی (با امکان ضرب، تقسیم، جمع و تفریق و نیز تعداد ۱۰ تا حافظه‌ی کمکی) در دست داریم و اجازه نداریم عددی که ماشین نشان می‌دهد را بر روی برگی یادداشت کنیم یا به خاطر بسپاریم.

این را نیز می‌دانیم که ماشین همه‌ی اعداد ۱ تا n را نشان می‌دهد، به جز دو عدد x و y. ما از قبل مقدار x، y و n را نمی‌دانیم.

با چند بار فشار دادن دکمه‌ی «نمایش»، می‌توانیم مقدارهای x و y را پیدا کنیم. فرض کنید که $n \leq ۱۰۰۰۰$ و ماشین حساب تا اعداد $۱۰^{۱۰}$ را می‌تواند در خود ذخیره کند و بر روی آن‌ها عملیات ساده‌ی حسابی گفته شده را انجام دهد.

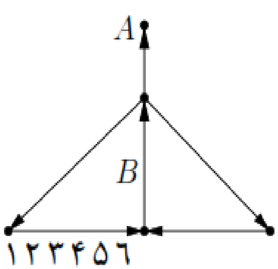
الف) ۱ ب) ۲ ج) $n-۲$ د) $n-۱$ ه) n

۳۶- تعدادی صابون در جدول روبه‌رو قرار دارند. در هر حرکت می‌توان به یک صابون در جهت افقی یا عمودی ضربه‌ای زد. در اثر این ضربه صابون در آن جهت شروع به حرکت می‌کند تا به مانعی (دیوارهای اطراف شکل یا صابون‌های دیگر) برسد. در این صورت در خانه قبل از آن مانع متوقّف می‌شود. اگر صابون از یکی از سوراخ‌هایی نشان داده شده در شکل عبور کند از جدول خارج می‌شود. کم‌ترین تعداد حرکات برای خارج کردن همه صابون‌ها از جدول چه‌قدر است؟



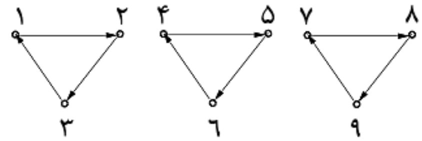
الف) ۷ ب) ۸ ج) ۹ د) ۱۰ ه) ۱۱

۳۷- شکل روبه‌رو نشان‌دهنده‌ی تعدادی خیابان و تقاطع‌های بین آن‌هاست. خیابان‌ها در جهت فلش‌ها یک‌طرفه هستند. عرض هر خیابان هم به اندازه یک ماشین است؛ یعنی ماشین‌ها نمی‌توانند از یکدیگر سبقت بگیرند. همچنین ماشین‌ها نمی‌توانند در محلّ تقاطع‌ها بایستند. در نتیجه در هر لحظه هر ماشین فقط می‌تواند در یک خیابان قرار بگیرد. می‌دانیم که یک ایستگاه عوارضی در خیابان B قرار دارد و از هر ماشین که عبور می‌کند مبلغ ۱۰ تومان دریافت می‌کند. نقطه‌ی A که در شکل دیده می‌شود یک پارکینگ است. ماشین‌های با شماره‌ی ۱ تا ۶ پشت سر هم به ترتیبی که نشان داده شده است و در جهت چپ به راست در خیابان پایین قرار دارند. می‌خواهیم این ماشین‌ها را به پارکینگ A منتقل کنیم. کم‌ترین مجموع مقدار عوارض پرداختی چه‌قدر است تا این ماشین‌ها به ترتیب شماره‌هایشان (اوّل ۱ بعد ۲، ...) وارد پارکینگ شوند؟



الف) ۱۲۰ ب) ۱۳۰ ج) ۱۴۰ د) ۱۵۰ ه) ۱۶۰

۳۸- یک کشور با ۹ شهر داریم. همان‌طور که در شکل می‌بینید، تعدادی جادّه‌ی یک‌طرفه بعضی از شهرها را به هم وصل کرده است. یک شهر، مثلِ a، را «خطرناک» می‌گوییم هرگاه شهر دیگری مثلِ b وجود داشته باشد، به صورتی که بتوان از a به b رفت، امّا نتوان از b به a بازگشت. دولت قصد دارد ۲ جادّه‌ی یک‌طرفه‌ی جدید احداث کند، به نحوی که در نهایت دقیقا ۳ شهرِ غیرخطرناک در آن کشور باقی بماند.



دولت به چند طریقِ مختلف می‌تواند این جادّه‌ها را احداث کند؟

الف) ۹ ب) ۸۱ ج) ۲۷ د) ۴۸۶ ه) ۷۲۹

۳۹- تعداد زیادی از هر کدام از وزنه‌های ۱، ۲، ۵، ۱۰، و ۲۰ کیلوگرمی روی میز داریم. یک جسم با وزن نامشخّص در یک کفه‌ی ترازوی ساده‌ی دو کفه‌ای قرار می‌دهیم. در هر «توزین» فقط می‌توانیم یک وزنه را از روی میز در کفه‌ی دوم قرار دهیم یا یک وزنه را از روی کفه بر روی میز بگذاریم. توجه کنید که مجاز به گذاردن وزنه در کفه‌ای که جسم قرار دارد نیستیم.

برای مشخّص کردن وزن دقیق جسم مطابق الگوریتم زیر عمل می‌کنیم:

تعدادی وزنه‌ی ۲۰ کیلوگرمی را یک‌به‌یک در کفه‌ی دوّم قرار می‌دهیم تا کفه‌ی دوّم سنگین‌تر از جسم شود. سپس آخرین وزنه را بر می‌داریم.

کار فوق را به ترتیب را وزنه‌های ۱۰، ۵، ۲ و ۱ انجام می‌دهیم تا ترازو کاملا متوازن شود، که در آن صورت کار را متوقّف می‌کنیم.

دقت کنید که در انجام این مراحل به محض این که ترازو کاملا متوازن شود، الگوریتم پایان می‌یابد. اگر وزن جسم حدّاکثر ۱۰۰ کیلوگرم باشد، الگوریتم فوق حدّاکثر پس از چند توزین پایان می‌یابد؟

الف) ۱۶ ب) ۱۵ ج) ۱۸ د) ۶ ه) ۲۰

۴۰- کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟

الف) ب ب) د ج) الف د) ج ه) هیچ‌کدام

این سوال نمره‌ی منفی ندارد ولی شما در این سوال به شرطی نمره می‌گیرید که گزینه‌ای را انتخاب کنید که از داوطلبانی که به این سوال جواب داده‌اند کم‌ترین تعدادشان همین گزینه را انتخاب کرده باشند.

«پاسخنامه تشریحی»

۱- افرادی که می‌توانند از امین رتبه بهتری کسب کنند کسانی هستند که در یکی از درس ریاضی و یا فیزیک (و یا هر دو) نمره بهتری از امین به دست آورند. دست تعداد این افراد حداکثر می‌تواند $(۱-۱۱)+(۱-۷)$ یعنی ۱۶ باشد که در این صورت امین رتبه هفدهم را کسب خواهد کرد.

۲- حرکت به سمت راست را با r، حرکت به سمت بالا با n و حرکت به سمت بالا راستی را و o نمایش می‌دهیم. برای آنکه مسیر طی شده از A به B باشد، لازم است دو واحد از حرکات، بالا راستی، سه واحد از آن حرکات، به سمت راست و بالاخره سه واحد باقیمانده از ۸ حرکت به سمت بالا باشد. هر مسیر متناظر با خود دنباله‌ای متشکل از دو تا o، سه تا u و برعکس. عنوان مثال دنباله متناظر با مسیر مشخص شده در شکل به صورت orrouuru می‌باشد. تعداد دنباله‌های یاد شده (شامل دو هفته o سه حرف u) برابر $\frac{۸!}{۲!\times۳!\times۳!}$ یعنی ۵۶۰ می‌باشد، بنابراین تعداد مسیرهای یاد شده نیز برابر همین می‌باشد.

۳- عددی بر ۳۴ بخش پذیر است که بر ۱۷ و ۲ بخش پذیر باشد و نیز عددی بر ۳۸ بخش پذیر است که بر ۱۹ و ۲ بخش پذیر باشد. اگر در جدول ۵×۵ دو عدد ۱۷ و ۱۹ هم سطر و یا هم ستون نباشند آنگاه منظم کردن آن جدول غیر ممکن است زیرا مجموعه تعداد کل خانه‌هایی که حداقل با یکی از این آن دو عدد هم سطر و یا هم ستون هستند برابر ۱۴ می‌باشد که برای منظم شدن آن جدول لازم است هر یک از آن ۱۴ خانه عددی فرد باشد درحالی‌که تعداد اعداد فرد باقیمانده برابر ۱۱ می‌باشد و اما اگر در جدول ۵×۵ دو عدد ۱۷ و ۱۹ هم سطر و هم ستون باشند (که این کار به ۲۰۰ طریق ممکن است زیرا عدد ۱۷، ۲۵ انتخاب و سپس عدد ۱۹، ۸ انتخاب در پیش روی خود دارند) آنگاه مجموع تعداد کل خانه‌هایی که حداقل با یکی از آن دو عدد هم سطر و یا هم ستون هستند برابر ۱۱ می‌باشد (در جدول مقابل آن خانه‌ها با O نشان داده شده‌اند) که پرکردن آن ۱۱خانه با ۱۱ عدد فرد به !۱۱ طریق ممکن است. پر کردن ۱۲ خانه باقی مانده با ۱۲ عدد زوج نیز به !۱۲ طریق انجام می‌شود که در کل جواب مورد نظر $۸\times۲۵\times۱۱!\times۱۲!$ به دست می‌آید.

	O		O	
O	۱۷	O	۱۹	O
	O		O	
	O		O	
	O		O	

۴- حاصل عبارت داده شده به ازای مقادیر مختلف برای x_iها از ۰ تا ۳۲ متغیر است. تنها در ۴ مورد ۰، ۱، ۳۲ و ۳۳ متغیرهای از $x_۱$ تا $x_۵$ شبیه به هم هستند (در مورد ۰ و ۱ هر پنج متغیر برابر ۰ و در مورد ۳۲ و ۳۳ هر پنج متغیر برابر۱ هستند). در سایر موارد اگر دو متغیر $x_۱$ و $x_۲$ نابرابر باشند می‌توان مقادیر آنها را با هم عوض کرد که در اینصورت یک ۶–تایی جدید پدید می‌آید ولی x تغییر نمی‌کند. اگر $x_۱$ و $x_۲$ با هم مشابه بوده ولی با $x_۳$ مشابه نباشند می‌توان مقادیر $x_۱$ و $x_۲$ را با مقدار $x_۳$ جابه‌جا کرد. اگر $x_۱$، $x_۲$ و $x_۳$ مشابه بوده ولی با $x_۴$ مشابه نباشند می‌توان مقادیر مشابه آن سه را با $x_۴$ تعویض کرد و بالاخره اگر $x_۱$، $x_۲$ ، $x_۳$ و $x_۴$ مشابه بوده ولی با $x_۵$ مشابه نباشند می‌توان مقادیر آن چهار متغیر مشابه را با $x_۵$ تعویض کرد بدون آنکه در مقدار x تغییری حاصل شود.

۵- هر n راهی یک دو شاخه که باید به یکی از راههای یک m راهی وصل شود، بنابراین هر n راهی یک راه را از بین برده و n راه جدید ایجاد می‌کند که برآیند آن تولید n-۱ راه می‌شود، در نتیجه تعداد کل راه‌های موجود با احتساب پریز اولیه به شکل زیر به دست می‌آید:

$$x=۱+۱۰\times(۱۰-۱)+۷\times(۷-۱)+۵\times(۴-۱)+۴\times(۲-۱)+۱۰۰\times(۱-۱۰)=۱۵۲$$

۶- به سادگی قابل درک است که هرگز با تعویض‌های شده بود دو عدد «۰» در یک سطر یا در یک ستون قرار نخواهند گرفت. بنابراین در هر سطر و یا ستون دقیقاً یک عدد «۰» و دو عدد «۱» وجود دارد. قراردادن یک عدد «۰» در ستون اول به ۳ طریق ممکن است. قراردادن

یک عدد «۰» در ستون دوم به شرطی که با «۰» موجود در ستون اول هم سطر نباشد به ۲ طریق ممکن است و بالاخره اینکه قرار دادن یک عدد «۰» در ستون سوم به شرطی که با هیچ یک از «۰»های قبلی هم سطر نباشد برابر ۱ می‌باشد که طبق اصل ضرب جواب مورد نظر ۱×۲×۳ یعنی ۶ می‌شود.

۷- فرض کنیم ابتدا a، سپس b و در نهایت نیز c به همین این ترتیب بازی را انجام دهند. با بررسی ارقام دوم، سوم و چهارم از سمت چپ دنباله‌های داده شده کارت افراد c ،b و a در هر یک از پنج دنباله داده شده به ترتیب از چپ به راست به صورت(۱۰،۱۰،۱۰)، (۱۰،۱۰،۰۱)، (۱۰، ۰۱، ۱۰) ، (۱۰، ۰۱، ۱۰) و (۰۱، ۱۰، ۰۱) در می‌آید که در ادامه بازی دنباله‌ای دوم و پنجم از سمت چپ با کارت‌های به دست آمده سازگاری دارند ولی مابقی دنباله‌ها این سازگاری را ندارند.

۸-

$$x_۰ = ۱۰۰ - ۴(x_۱ + ۴x_۲ + ۱۶x_۳) \Rightarrow x_۰ = ۴k \Rightarrow x_۰ = ۰$$

$$x_۰ = ۰ \Rightarrow x_۱ + ۴x_۲ + ۱۶x_۳ = ۲۵ \Rightarrow x_۱ = ۴L + ۱ \Rightarrow x_۱ = ۱$$

$$x_۱ = ۱ \Rightarrow x_۲ + ۴x_۳ = ۶ \Rightarrow (x_۲, x_۳) = (۲,۱) \quad (\text{یا } ۲،−۲)$$

$$\Rightarrow x_۰ + x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۴ \quad \text{یا } ۱$$

۹- ماشین سفید پشت پراید است، بنابراین پراید سفید نیست. از طرف دیگر پراید طوسی نیز نیست چون دوو طوسی است پس پراید سیاه بود و به ناچار پژو نیز سفید خواهد بود. ماشین علی پراید نیست چون جلوی پراید پارک شده است شیوه سیامک نیز پراید (و سیاه) نیست بنابراین پراید متعلق به بهروز است ماشین علی جلوی پراید و ماشین سفید پشت پراید پارک است به این معنا که ماشین علی نیست بنابراین ماشین علی که دوو بوده و ماشین سیامک نیز پژو است.

۱۰- مسئله مانند آن است که وضع خانه‌های سیاه موجود در چهار ستون اول را چنان منتقل کنیم که در نهایت صفحه شطرنجی شود در هر انتقال هر خانه سیاه فقط قادر است به خانه سفید مجاورش (در صورت وجود) منتقل شود. هر انتقال یک حرکت محسوب می‌شود بهترین حالت آن است که سیاه های موجود در ستون چهارم به ستون‌های هشتم و هفتم، سیاه های موجود در ستون سوم به ستون‌های ششم و پنجم، سیاه های موجود در ستون دوم به ستونهای چهارم و سوم و بالاخره سیاه های موجود در ستون اول به ستون‌های دوم و اول منتقل شوند. تعداد حرکات در مورد در جدول مقابل نشان داده شده‌اند که در مجموع برابر ۶۴ می‌شود.

	۱		۲		۳		۴
۰		۱		۲		۳	
	۱		۲		۳		۴
۰		۱		۲		۳	
	۱		۲		۳		۴
۰		۱		۲		۳	
	۱		۲		۳		۴
۰		۱		۲		۳	

۱۱- برای ۱۱ نفری که هر کدام یک پیتزای کامل می‌خورند مجموعاً ۱۱ پیتزا خریداری می‌شود برای ۹ نفری که هر کدام $\frac{۳}{۴}$ پیتزا را می‌خورند مجموعاً ۹ پیتزای کامل خریداری کرده و از هر یک از پیتزاها به اندازه $\frac{۱}{۴}$ برش خورده و پنج تا از آنها را به پنج نفری که هر کدام $\frac{۱}{۴}$ پیتزا را می‌خورند می‌دهیم و ۴ تای دیگر به ناچار دور می‌ریزیم.

برای ۱۳ نفری که هر کدام $\frac{۱}{۲}$ پیتزا را می‌خورند مجموعاً ۷ پیتزای کامل خریداری کرده و پس از تبدیل آنها به ۱۴ پیتزای نصفه ۱۳ تای آنها را به ۱۳ نفر مورد نظر می‌دهیم و یکی از نصفه ها را به ناچار دور می‌ریزیم. بنابراین حداقل پیتزاهای خریداری شده برابر ۷+۹+۱۱ یعنی ۲۷ می‌باشد.

۱۲- در بین آن‌ها ۱۰ نفر هیچ فردی نمی‌تواند دروغگو باشد چون جمله «شخص سمت راست من دروغگوست یا راستگو» جمله‌ای است درست. افراد همه راستگو هستند.

۱۳- برای همه مقادیر از ۱ تا ۱۰ برای n عدد خالی بندِ n رقمی وجود دارد. اگر عدد $n-1$ رقمی $\overline{a_1a_2...a_{n-1}}$ خالی بند باشد، آنگاه باقیمانده عدد nرقمی $\overline{a_1a_2...a_{n-1}0}$ را پیدا می‌کنیم چون $n \le 10$ بنابراین عدد باقیمانده به دست آمده یکی از اعداد ۰ تا ۹ می‌باشد که می‌توان با تبدیل رقم ۰ به رقمی که باقی مانده مورد نظر است عدد n رقمی به دست آمده را مضرب n کرد.

۱۴- اگر در رشته‌ای حرفی وجود داشته باشد که n بار تکرار شده باشد، آنگاه در رشته نهایی نیز باید حرفی وجود داشته باشد که n بار تکرار شده باشد چون هیچ یک از دو عمل یاد شده تکرار حذفی در یک رشته به تعداد n بار را تغییر نمی‌دهد. همچنین شرط لازم برای آنکه رشته‌ای بتواند از روی رشته دیگر به وجود آید آن است که تعداد حروف آن‌ها یکسان باشد. بنابراین اگر تعداد حروف تکراری دو رشته را به صورت دنباله‌ای مثلاً نزولی بنویسیم باید دنباله‌های متناظر به دو رشته کاملاً یکسان باشد. دنباله‌های متناظر به کلمات داده شده در گزینه‌ها به شکل زیر می‌باشند:

الف) (۱,۱,۱,۱,۱,۱,۱)
(۱,۱,۱,۱,۱,۱,۱,۱)

ب) (۳,۲,۱,۱,۱,۱)
(۲,۲,۲,۱,۱,۱)

ج) (۴,۳,۲,۱,۱,۱)
(۴,۳,۲,۱,۱,۱,)

د) (۲,۱,۱,۱)
(۱,۱,۱,۱,۱)

هـ) (۳,۲,۲,۱,۱,۱)
(۳,۲,۱,۱,۱,۱,۱)

همان طور که مشاهده می‌شود فقط در مورد گزینه ج دو دنباله به دست با هم یکسان هستند.

۱۵- به سادگی معلوم می‌شود که کوچک‌ترین n برای رسیدن به منظور، عددی است چهار رقمی. تا قبل از ۱۲۳ باید ۱۹۹ عدد قرار گیرد. در بین اعداد یک رقمی فقط یک عدد (عدد ۱)، در بین اعداد دو رقمی فقط ۳ عدد (اعداد ۱۰، ۱۱ و ۱۲) و بالاخره در بین اعداد سه رقمی فقط بیست و سه عدد (اعداد ۱۰۰ تا ۱۲۲) قبل از ۱۲۳ قرار می‌گیرند که تعداد کل آنها ۲۷ می‌شود. بنابراین باید عدد ۴ رقمی n چنان باشد که قبل از ۱۲۳ به تعداد ۲۷-۱۹۹ یعنی ۱۷۲ عدد قرار گیرد. معلوم می‌شود که همه اعداد از ۱۰۰۰ تا ۱۲۲۹ که تعداد آنها ۲۳۰ تا می‌باشد قبل از ۱۲۳ قرار می‌گیرند که یکصد و هفتاد و دومین آنها ۱۱۷۱ می‌باشد. بنابراین اگر n را برابر ۱۱۷۱ قرار دهیم به جواب خواهیم رسید.

۱۶-

$$(\text{ارزش } x) = -1\times10^{9}+9\times10^{8}-9\times10^{7}+9\times10^{6}-9\times10^{5}-9\times10^{4}-9\times10^{3}+9\times10^{2}-9\times10^{1}+9$$

$$\Rightarrow (\text{ارزش } y) = 1110^{9}-9\times10^{8}+9\times10^{7}-9\times10^{6}+9\times10^{5}-9\times10^{4}+9\times10^{3}-9\times10^{2}+9\times10^{1}-9$$

$$=(10-9)\times10^{9}-(10-1)\times10^{8}+...+(10-1)\times10^{1}-(10-1)$$

$$=1\times10^{10}-10\times10^{9}+2\times10^{8}-2\times10^{7}+2\times10^{6}-2\times10^{5}+2\times10^{4}-2\times10^{3}+2\times10^{2}-2\times10^{1}+1$$

$$=2222222221 \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 17$$

۱۷- اگر عدد k فرد باشد آنگاه یکی از دو عدد $\left[\frac{k}{2}\right]$ و $\left[\frac{k}{2}\right]$ زوج و دیگری فرد می‌باشد اگر عدد فرد را α و عدد زوج را β در نظر بگیریم چون دو عدد متوالی α و β می‌باشند بنابراین در شمردن $f(\beta)$ تمام اعداد تولید شده در شمردن $f(\alpha)$ نیز به کار رفته‌اند. در

این حالت می‌توان تساوی $f(k) = f(\alpha) + 2$ را نتیجه گرفت چون در محاسبه $f(k)$ دو عدد k و β نسبت به اعداد تولید شده در محاسبه $f(\alpha)$ بیشتر می‌باشند. اگر عدد k زوج باشد آنگاه دو عدد $\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$ و $\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$ با هم برابر می‌باشند که آن را θ می‌نامیم. در این حالت نیز با کمی دقت به تساوی $f(k) = f(\theta) + 1$ خواهد رسید.

از طرف دیگر معلوم می‌شود که اگر عدد k در بازهٔ $\left[2^n, 2^{n+1} - 1\right]$ در نظر گرفته شود، آنگاه عدد α و یا θی تعریف شده در فوق در بازه $\left[2^{n-1}, 2^n - 1\right]$ قرار خواهد گرفت، به این معنا که اگر ماکزیمم مقدار f در بازه $\left[2^{n-1}, 2^n - 1\right]$ برابر m باشد، آنگاه ماکزیمم مقدار f در بازه $\left[2^n, 2^{n+1} - 1\right]$ برابر $m + 2$ خواهد شد.

ماکزیمم مقدار در بازه $[4,7]$ برابر ۵ می‌باشد. بنابراین ماکزیمم مقدار در بازه‌های $[8\ 15][16\ 31][32\ 63],\dots,[1024,2047][2048,4095]$ به ترتیب برابر ۷، ۹، ۱۱، ...، ۲۱ و ۲۳ خواهد شد. در مورد عدد ۳۹۹۹ مدار f به شکل زیر برابر ۲۳ می‌شود:

$$3999 \to 2000,1999 \to 1000,999 \to 500,499 \to 250,249 \to 125,124 \to$$
$$62,63 \to 31,32 \to 16,15 \to 8,7 \to 3,4 \to 2,1$$

۱۸- اگر آرش از سه تایی (x,y,z) سه تایی $(x+y\ ,\ x-y\ ,\ z)$ را چنان بسازد که هر سه عدد z، $x-y$ و $x+y$ بر ۳ بخش پذیر باشند، آنگاه خواهیم داشت:

$$z \overset{3}{\equiv} 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x-y \overset{3}{\equiv} 0 \\ x+y \overset{3}{\equiv} 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x \overset{3}{\equiv} 0 \Rightarrow x \overset{3}{\equiv} 0 \Rightarrow y \overset{3}{\equiv} 0$$

بنابراین معلوم می‌شود شرط لازم برای آنکه آرش بتواند برنده شود آن است که سه تایی ماقبل آخر باید چنان باشد که هر سه عدد موجود در آن سه تایی بر ۳ بخش‌پذیر باشند و اگر این روند را به قبل ادامه دهیم معلوم خواهد شد که سه‌تایی اولیه نیز باید هر سه عددش بر ۳ بخش‌پذیر باشد تا آرش بتواند برنده شود که در بین سه تایی های داده شده هیچ سه تایی چنین خاصیتی را ندارد.

۱۹-

$$\overline{a_r a_{r-1} \dots a_2 8} \times 4 = \overline{8 a_r a_{r-1} \dots a_2} \Rightarrow a_2 = 2$$
$$\Rightarrow \overline{a_r a_{r-1} \dots a_3 28} \times 4 = \overline{8 a_r \dots a_3 2} \Rightarrow a_3 = 1$$
$$\Rightarrow \overline{a_r \dots a_4 128} \times 4 = \overline{8 a_r \dots a_4 12} \Rightarrow a_4 = 5$$
$$\Rightarrow \overline{a_r a_5 5128} \times 4 = \overline{8 a_r \dots a_5 512} \Rightarrow a_5 = 0$$
$$\Rightarrow \overline{a_r a_6 05128} \times 4 = \overline{8 a_r \dots a_6 512} \Rightarrow a_6 = 2$$
$$\Rightarrow \overline{a_r a_7 205128} \times 4 = \overline{8 a_r \dots a_7 512} \Rightarrow a_7, a_8, \dots = \text{وجود خارجی ندارد}$$
$$\Rightarrow \text{عدد مورد نظر} = 205128 \Rightarrow a_{r-1} = a_5 = 0$$

۲۰- اگر حرکت آخر با محمد باشد آنگاه او می‌تواند یکی از سطرهایی که پر شده است را در نظر گرفته و مجموع اعداد موجود در آن سطر را به دست آورد، سپس اختلاف بین این مجموع با مجموع اعداد ستونی که تن‌ها خانه خالی در آن است را به دست آورده فهم و آن عدد را در خانه خود قرار می‌دهد و برنده می‌شود. و اما اگر حرکت ما قبل آخر با محمد باشد یقیناً آن خانه تن‌ها خانه سطر (و یا ستون) خود می‌باشد که می‌تواند مجموع اعداد یکی از ستون‌ها (یا سطرها)ی پر را حساب کرده و با توجه به مجموع خانه خالی را چنان پر می‌کند کـه برنده شـود.

۲۱- تعداد مسیرهای به طول i(۱۴≥ i ≥ ۲) در جدول زیر مشخص شده است:

طول مسیر	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴
تعداد مسیر	۱۳	۲۴	۲۲	۲۰	۱۸	۱۶	۱۴	۱۲	۱۰	۸	۶	۴	۲

۲۲- با تغییر یکی از ضرایب s_iها از ۱ به ۱- و یا از ۱- به ۱ زوجیت عدد n تغییر نخواهد کرد، بنابراین اگر عددی مانند α توسط ماشین قابل نمایش باشد عدد $\alpha+1$ قابل نمایش نخواهد بود.

۲۳- اگر هر سه رقم در بازه [۰,۷] و یا در بازده [۳,۹] باشند، آنگاه با حداکثر ۷ مرحله، به صفر خواهیم رسید (در مورد گردونه مربوط به بزرگترین رقم را آنقدر به عقب می‌چرخانیم تا با عدد متوســط برابر باشد، سپس گردونه‌هــای مربـوط به آن دو رقم را آنقـدر به عقــب می‌چرخانیم تا با عدد کوچک برابر باشند و در نهایت نیز هر سه گردونه را با هم می‌چرخانیم تا به سه تا صفر برسیم. در مورد دوم نیز کار را با چرخاندن گردونه مربوط به کوچکترین رقم به سمت جلو ادامه می‌دهیم.

اگر دو رقم در بازه [۰,۵] و رقم دیگر در بازه [۸,۹] باشد نیز حداکثر مراحل کار برابر با ۷ می‌باشد، به این ترتیب که ابتدا عدد بزرگتر در بازه [۰,۵] را آنقدر به عقب می‌چرخانیم تا با عدد دیگر برابر باشند. سپس آن دو گردونه را با هم آنقدر می‌چرخانیم تا به صفر برسند (معلوم است که این مراحل حداکثر برابر ۵ می‌باشد)، در نهایت نیز گردونه سوم را که عددش ۸ و یا ۹ می‌باشد به جلو می‌چرخانیم تا به صفر برسد (در این مورد نظر حداکثر مراحل برابر ۲ می‌باشد).

اگر دو رقم در بازه [۵,۹] و رقم دیگر در بازه [۱,۲] باشد نیز همانند بند قبلی عمل می‌کنیم.

۲۴- ابتدا باید اعداد را به مبنای ۲ تبدیل کرده و آن دو را به طوری در دو سطر بنویسیم که ارقام هم‌مرتبه در زیر هم قرار گیرند. چون مجموع هر دو موجود در یک ستون برابر ۶۴ (که در مبنای ۲ به صورت ۱۰۰۰۰۰۰ قابل نمایش است) می‌باشــد، بنابرایـن دو عدد موجود در یک ستون چنانند که به ازای اولین «۱» از سمت راست در عدد پایینی، رقم متناظرش در عدد بالایی نیز ۱ است. از آن رقم به قبل هر دو رقم متناظر، در آن دو عدد تا جایگاه ششم از سمت راست، باید متفاوت باشد تا مجموع به صورت ۱۰۰۰۰۰ در بیاید. به عنوان مثال در مورد دو عدد ۴۷ و ۱۷ که در صورت سؤال اشاره شده است وضعیت، به قرار زیر می‌باشد:

۴۷ →	۱	۰	۱	۱	۱	۱
۱۷ →	۰	۱	۰	۰	۰	۱
جایگاه →	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

برای تبدیل اعداد بالایی به پایینی و برعکس، کافی است در مورد ستون‌های به شکل «$\underset{2^i}{\overset{1}{0}}$» که جایگاه سمت راست آن به شکل «$\underset{1}{\overset{0}{}}$» نمی‌باشد دقیقاً 2^i واحد از عدد بالایی برداشته و به عدد پایینی اضافه کنیم و در مورد ستون‌های به شکل «$\underset{2^i}{\overset{1}{0}}$» که یک یا چند ستون بلافاصله بعد از آن به شکل «$\underset{1}{\overset{0}{}}$» می‌باشند، کافی است به اندازه 2^j از عدد بالایی برداشته و به عدد پایینی اضافه کنیم که 2^j جایگاه سمت راست‌ترین ستون به شکل «$\underset{1}{\overset{0}{}}$» می‌باشد که در آن دو عدد وجود دارد. در مورد اعداد ۴۷ و ۱۷ مقادیر اضافه شده به ترتیب به صورت 2^1، 2^2، 2^3 و 2^4 می‌باشد که از قاعده بالا پیروی می‌کنند.

بنابراین معلوم می‌شود که تعداد اعداد اضافه شده، برای تبدیل اعداد بالایی به اعداد پایینی یک واحد کمتر از تعداد «۱»های موجود در عدد بالایی می‌باشد.

اعداد از ۳۳ تا ۶۳ مجموعاً ۱۱۱ تا ۱ دارند که اگر به ازای هریک از عدد «۱»کم کنیم معلوم می‌شود که تعداد مراحل لازم برابر ۳۱ − ۱۱۱ یعنی ۸۰ می‌شود. در مورد ستون مربوطه به دو عدد ۰ و ۶۴ نیز یک مرحله تعویض نیاز است. بنابراین جواب مورد نظر ۸۱ می‌شود.

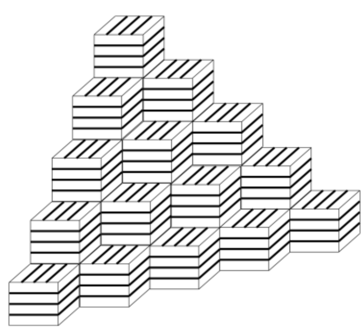
۲۵- ماخ در هر مورد بهترین تبدیل مطابق الگوریتم زیر می‌باشد:

$$\frac{63}{1} \xrightarrow{2^0} \frac{64}{0} \xrightarrow{2^6} \frac{0}{64} \xrightarrow{2^0} \frac{1}{63}$$

$$\frac{47}{17} \xrightarrow{2^5} \frac{15}{49} \xrightarrow{2^1} \frac{17}{47}$$

$$\frac{55}{9} \xrightarrow{2^5} \frac{23}{41} \xrightarrow{2^4} \frac{7}{57} \xrightarrow{2^1} \frac{9}{55}$$

۲۶- ماخ حجم مورد نظر به شکل مقابل می‌باشد که دارای ۳۵ مکعب واحد می‌باشد:



۲۷- شرط لازم و کافی برای آنکه سوراخ‌های یک مستطیل n×m، طلایی باشد آن است که n مضربی از m باشد. این موضوع در شکل مقابل نشان داده شده است.

فرض می‌کنیم مستطیل n×m مطابق شکل مقابل دارای سوراخ طلایی باشد، آنگاه پرتوهای ورودی و خروجی از تلاقی با یکدیگر k عدد مستطیل $a \times b$ ایجاد می‌کنند که طول مستطیل اولیه $\frac{\sqrt{۲}k}{۲}(a+b)$ و عرض آن مستطیل برابر $\frac{\sqrt{۲}}{۲}(a+b)$ می‌شود، به این معنا که طول مستطیل باید k برابر عرض آن باشد (k عددی است صحیح). بنابراین شرط لازم و کافی برای آنکه سوراخ‌های مستطیلی n×m ، طلایی باشد آن است که n مضرب صحیحی از m باشد. معلوم است که در این حالت به غیر از دو سوراخ گوشه‌ای، مابقیِ m-۱ سوراخ همگی طلایی خواهند بود.

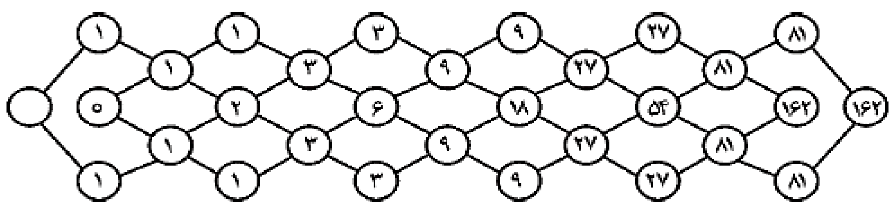
در بین مستطیل‌های داده شده، سوراخ‌های غیر واقع بر گوشه‌های ۱۳۸۴ × ۱۳۸۴ و ۱۳۸۴× ۴۱۵۲ همگی طلایی‌اند که تعداد کل آنها ۱۳۸۳ + ۱۳۸۳ یعنی ۲۷۶۶ می‌شود.

۲۸- اگر خانه‌های جدول را مطابق شکل مقابل از ۱ تا ۲۵ شماره گذاری کنیم، آنگاه با وجود یک لوبیا در خانه شماره ۱۳ فقط خانه‌های ۲، ۴، ۶، ۱۰، ۱۶، ۲۰، ۲۲ و ۲۴ آمن هستند؛ یعنی اگر فردی در خانه‌ای غیر از شماره‌های فوق لوبیایی را قرار دهـد فـرد دیگر برنده خواهد شد.

۱	۲	۳	۴	۵
۶	۷	۸	۹	۱۰
۱۱	۱۲	●	۱۴	۱۵
۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵

در بین شماره‌های فوق نیز دو شماره ۲ و ۴ با یکدیگر، ۶ و ۱۶ با یکدیگر، ۱۰ و ۲۰ با یکدیگر و بالاخره ۲۲ و ۲۴ با یکدیگر وابستگی دارند، به این صورت که اگر هر دو شماره وابسته به هم لوبیایی اختصاص داده شود، نفر بعدی می‌تواند با اختصاص دادن لوبیایی به خانه واقع در بین آن دو خانه وابسته، برنده می‌شود. بنابراین بهترین حرکات ممکن آن است که مهدی خانه ۱۰، مرتضی خانه ۴، مهدی خانه ۶ و بالاخره مرتضی خانه ۲۲ را انتخاب کند. در حرکت بعدی مهدی هر حرکتی را انجام دهد حداقل با یک لوبیا در یک ردیف ستونی، سطری و یا قطری قرار خواهد گرفت که مرتضی را در وضعیت بُرد قرار می‌دهد. در حرکت آخر مرتضی با قرار دادن لوبیا در خانه مورد نظر برنده می‌شود.

۲۹- در سمت چپ هر گره‌ای مانند m، حداکثر دو گره مانند n و k وجود دارد. تعداد راه‌های رسیدن به گره m با مجموع تعداد راه‌های رسیدن به دو گره n و k برابر است، بنابراین تعداد راه‌های رسیدن به هر گره مطابق شکل زیر می‌باشد:



۳۰- بعد از سوتِ i ام شماره روی کارت‌ها به شکلی در می‌آید که در جدول زیر نمایش داده شده‌اند:

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴
i=۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
i= ۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
i= ۲	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
i= ۳	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰
i= ۴	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰

i= ۵	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۰	۰
i= ۶	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۰
i= ۷	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۱	۰	۱	۰	۰
i= ۸	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۱	۰	۱	۰
i= ۹	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۱	۰	۱
i= ۱۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۱	۱
i= ۱۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۱	۱	۱
i= ۱۲	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱

۳۱- مجموعهٔ داده شده را به شکل زیر به سه مجموعهٔ A، B و C افراز می‌کنیم، مجموعهٔ A مجموعه اعدادی است که مضرب ۳ هستند، مجموعهٔ B مجموعه اعدادی است که در تقسیم بر ۳ باقی مانده ۱ می‌آورند و مجموعهٔ C مجموعـه اعـدادی است که در تقسیم بر ۳ باقی مانده ۲ می‌آورند:

$A = \{۳,۶\}$

$B = \{۱,۴,۷\}$

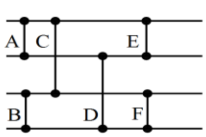
$C = \{۲,۵\}$

برای تشکیل زیرمجموعهٔ مورد نظر باید i عضو از A، j عضو از B و k عضو از C انتخاب شود که تمامی حالات ممکن در ستون‌های جدول زیر مشخص شده‌اند:

i	۰	۱	۲	۰	۱	۲	۰	۱	۲	۰	۱	۲
j	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۲	۲	۲	۳	۳	۳
k	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۲	۲	۲	۰	۰	۰
تعداد حالات ممکن	۱	۲	۱	۶	۱۲	۶	۳	۶	۳	۱	۲	۱

→ مجموع = ۴۴

۳۲- اگر سوئیچ‌ها را مطابق شکل مقابل با A، B، C، D، E و F نام‌گذاری کنیم، آنگاه اگر وضعیت آنها را به ترتیب مطابق جدول زیر در نظر بگیریم، آنگاه به هریک از خروجی‌های موجود در گزینه‌ها خواهیم رسیـــد(علامت × نشان‌گر ضربـدری بودن سوئیچ‌ها و علامت → نشان‌گر مستقیم بودن آن سوئیچ می‌باشد):



گزینه	A	B	C	D	E	F
الف	→	→	×	→	→	→
ب	→	→	×	→	×	×
ج	→	→	×	×	→	×
د	×	→	×	→	×	×

۳۳- در مورد گزینهٔ ب، چون a در مکان ۶ قرار گرفته است معلوم می‌شود که قبل از آن مکان‌های ۳، ۴ و ۵ پر بوده است که یکی از آنها یعنی مکان ۴ توسط f پر شده است، بنابراین f قبل از a وارد جدول شده است. از طرف دیگر مکان اولیهٔ f خانه می‌باشد که هنگام ورود به جدول در صورت پر بودن آن خانه به یک خانه دیگر می‌رود. لحظهٔ ورود عنصر f به جدول، خانه ۶ خالی بوده است و لزومی نداشت که به خانهٔ دیگر برود.

ترتیب ورود حروف به جدول در مورد گزینه‌های الف، ج و د به ترتیب به شکل زیر می‌تواند باشد:

الف: $a \longrightarrow b \longrightarrow c \longrightarrow d \longrightarrow e \longrightarrow f \longrightarrow g$

ب: $a \longrightarrow c \longrightarrow e \longrightarrow g \longrightarrow b \longrightarrow d \longrightarrow f$

ج: $a \longrightarrow d \longrightarrow e \longrightarrow f \longrightarrow c \longrightarrow g \longrightarrow b$

۳۴- تعداد افرادی از ردیف اول که در انتهای ساعت اول چای خورده‌اند را α و مابقی را β و این تعداد را در ردیف دوم به ترتیب γ و θ می‌نامیم، خواهیم داشت:

$$\alpha + \beta = \gamma + \theta = ۱۰$$
$$\alpha + \beta = ۱۳, \beta + \theta = ۷$$

معلوم است که از بین دو عدد α و γ یکی زوج و دیگری فرد است. بدون آنکه به کلیت مسأله لطمه‌ای وارد شود α را زوج و γ را فرد در نظر می‌گیریم که در این صورت در انتهای ساعت دوم تعداد افرادی از ردیف اول که چایی می‌خورند برابر θ و مابقی برابر γ و نیز این تعداد در ردیف دوم به ترتیب برابر α و β به‌دست می‌آید. در انتهای ساعت سوم و بنابراین در انتهای ساعاتِ فرد وضعیت افراد چایی خورده همانند انتهای ساعت اول می‌شود.

۳۵- ابتدا با یک بار فشار دادن دکمهٔ نمایش، اعداد نشان داده شده را وارد ماشین حساب کرده و آنها را با هم جمع می‌کنیم، معلوم است که حاصل این جمع برابر $(x + y)$ - $\frac{n(n+۱)}{۲}$ خواهد بود. از آن‌جا که مقدار $x + y$ حداقل برابر ۳ و حداکثر برابر $۲n - ۱$ می‌باشد.

بنابراین حاصل عدد به‌دست آمده بین $\frac{(n-۲)(n-۱)}{۲}$ و $\frac{(n-۲)(n+۳)}{۲}$ خواهد شد. فرض می‌کنیم آن حاصل جمع برابر α باشد. در این‌صورت در نابرابریِ $\frac{(n-۲)(n-۱)}{۲} \le \alpha \le \frac{(n-۲)(n+۳)}{۲}$ برای n بیش از دو جواب به‌دست نخواهد آمد. بار دیگر با فشار دادن دکمهٔ نمایش، هریک از اعداد نشان داده شده را به توان ۲ رسانده و با هم جمع می‌کنیم. می‌دانیم مجموع مربع اعداد از ۱ تا n برابر $\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$ می‌باشد، بنابراین با توجه به محدودیت به‌دست آمده برای n در حالت قبلی، برای $x^۲ + y^۲$ دو مقدار دریافت می‌شود که با تشکیل یک دستگاه دو معادله و دو مجهول، مقادیر x و y به‌صورت منحصر به فرد پیدا می‌شود. به عنوان مثال فرض می‌کنیم مجموع داده‌ها برابر ۱۰۰۰ و مجموع مربع داده‌ها برابر ۳۰۴۷۰ باشد در آن‌صورت:

$$\frac{(n-۲)(n-۱)}{۲} \le ۱۰۰۰ \le \frac{(n-۲)(n+۳)}{۲} \Rightarrow n = ۴۵ \text{ یا } n = ۴۶$$

اگر $n = ۴۵$ آنگاه :

$$۱ + ۲ + ۳ + ... + ۴۵ = \frac{۴۵ \times ۴۶}{۲} = ۱۰۳۵ \Rightarrow x + y = ۳۵$$

$$1 + 2^2 + 3^2 + ... + 45^2 = \frac{45 \times 46 \times 91}{6} = 31395 \Rightarrow x^2 + y^2 = 925$$

در این حالت برای x و y جواب منحصر به فرد ۳۰ و ۵۰ به‌دست می‌آید.

و اما اگر $n = 46$ آنگاه:

$$1 + 2 + 3 + ... + 46 = \frac{46 \times 47}{2} = 1081 \Rightarrow x + y = 81$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 46^2 = \frac{45 \times 47 \times 93}{6} = 33511 \Rightarrow x^2 + y^2 = 3041$$

در این حالت برای x و y جواب‌های صحیحی در محدودهٔ از ۱ تا ۴۶ به‌دست نمی‌آید.

۳۶- اگر صابون‌های موجود در شکل را به ترتیب از چپ به راست با A، B، C و D نام‌گذاری کنیم، آنگاه بهترین حرکات به شکل زیر می‌باشد:

۱) A : راست	۲) C : پایین	۳) B : راست
۴) C : بالا	۵) D : پایین	۶) D : چپ
۷) A : بالا	۸) B : بالا	۹) D : بالا

۳۷- بهترین الگوریتم برای حرکات ماشین‌ها به شکل زیر می‌باشد:

- همه ماشین‌ها از عوارضی رد شده و ماشین‌های ۴ و ۲ در خیابان سمت راست و ماشین‌های ۶، ۵ و ۳ در خیابان سمت چپ ردیف شده و ماشین ۱ به خروجی می‌رود که در این حالت مجموعاً ۶۰ تومان عوارض پرداخت می‌شود.
- ماشین ۴ از عوارضی رد شده و درپشت آخرین ماشین سمت چپ یعنی ماشین ۳ قرار می‌گیرد که در این حالت نیز ۱۰ تومان عوارض پرداخت می‌شود.
- تنها ماشین موجود در سمت راست یعنی ماشین ۲ از عوارضی رد شده و وارد پارکینگ می‌شود که ۱۰ تومان عوارض پرداخت می‌شود.
- ماشین‌های ۶ و ۵ از عوارضی رد شده و ماشین ۶ به خیابان سمت راست و ماشین ۵ به خیابان سمت چپ و به پشت ماشین ۴ منتقل می‌شوند و در این مجموعاً ۲۰ تومان به عوارضی پرداخت می‌شود.
- ماشین‌های ۳، ۴ و ۵ که در خیابان سمت چپ و به همین ترتیب قرار دارند از عوارضی رد شده و به ترتیب در پارکینگ قرار می‌گیرند و بعد از آنها ماشین شماره ۶ از خیابان سمت راست به عوارضی رفته و از آن‌جا به پارکینگ منتقل می‌شود. در این حالت نیز مجموع عوارض پرداخت شده برابر ۴۰ تومان می‌باشد. با توجه به حالت‌بندی فوق مجموع کل عوارض برابر ۴۰ + ۲۰ + ۱۰ + ۱۰ + ۶۰ یعنی ۱۴۰ تومان به‌دست می‌آید.

۳۸- شکل داده شده از سه مؤلفه a، b و c تشکیل شده است. برای ساختن شبکه مطلوب باید به یکی از دو شکل $a \to b \to c$ و یا $a \to b \leftarrow c$ برسیم که تعداد کل حالات رسیدن به هریک از آنها به ترتیب به شکل زیر به‌دست می‌آید:

I) $a \to b \to c$

- انتخاب یک مؤلفه از سه مؤلفه برای آنکه نقش a را بازی کند (این کار به ۳ طریق ممکن است).
- انتخاب یک رأس از رئوس آن برای آنکه از آن رأس فلشی خارج شود (این‌کار نیز به ۳ طریق ممکن است).

- انتخاب یک مؤلفه از دو مؤلفه باقی مانده برای آنکه نقش b را بازی کند (این‌کار به ۲ طریق ممکن است).
- انتخاب یک رأس از رئوس b برای آنکه فلشی به آن وارد شود(به ۳ طریق).
- انتخاب یک رأس از رئوس b برای آنکه فلشی از آن خارج شود(به ۳ طریق).
- انتخاب یک رأس از رئوس c برای آنکه فلش خارج شده از b به آن وارد شود(به ۳ طریق).

طبق اصل ضرب تعداد کل طرق در این حالت برابر ۳ × ۳ × ۳ × ۲ × ۳ × ۳ یعنی ۴۸۶ می‌شود.

II) $a \rightarrow b \leftarrow c$

- انتخاب یک مؤلفه از سه مؤلفه برای آنکه نقش b را بازی کند (به ۳ طریق). (البته مشخص است که دو مؤلفه a و c هم نقشند.)
- انتخاب یک رأس از رئوس a و یک رأس از رئوس c برای آنکه فلش‌هایی از آنها خارج شود(۳ × ۳ طریق).
- انتخاب یک رأس از رئوس b برای وارد شدن فلش خارج شده از a و یک رأس (نه لزوماً متمایز از قبلی) از رئوس b برای وارد شده فلش خارج شده از c (۳ × ۳ طریق).

در این حالت نیز مجموع کل طرق برابر ۳
در این حالت نیز مجموع کل طرق برابر $۳^۲ \times ۳^۲ \times ۳$ یعنی ۲۴۳ می‌شود.
با توجه به حالت‌بندی فوق جواب مورد نظر ۲۴۳ + ۴۸۶ یعنی ۷۲۹ به‌دست می‌آید.

۳۹- اگر x نمایشگر آن باشد که وزنهٔ x را در کفهٔ دوم قرار دهیم و نیز $\bar{x}$ نمایشگر آن باشد که وزنهٔ x را از آن کفه برداریم، آنگاه الگوریتم توزین به شکل زیر خواهد بود:

۲۰, ۲۰,...,۲۰, ~~۲۰~~ ,۱۰,۱۰,...,۱۰, ~~۱۰~~ ,۵,۵,...,۵, ~~۵~~ ,۲,۲,...,۲, ~~۲~~ ,۱

چون وزنه ۲۰ کیلویی آخر برداشته می‌شود. بنابراین تعداد ۱۰ ها نمی‌تواند بیش از ۲ باشد، به همین دلیل تعداد ۵ها و ۲ها نیز نمی‌تواند بیش از ۲ باشد. بنابراین الگوریتم بیشترین توزین به شکل زیر می‌باشد:

۲۰, ۲۰,۲۰,۲۰,۲۰, ~~۲۰~~ ,۱۰,۱۰, ~~۱۰~~ ,۵,۵, ~~۵~~ ,۲,۲ , ~~۲~~ ,۱